Betragsgleichungen

mit einem Betrag und mit zwei Beträgen

Aufgabensammlung

Datei Nr. [illegible]2162

Stand: 16. Dezember 2022

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Betragsgleichungen können sehr schwer sein. Und viele haben die Methoden dazu nicht gelernt.
Hier eine Sammlung zum Üben mit tollen Musterlösungen.

Dazu ein paar Tipps:

(1) Man kann einen Betrag so auflösen: $|a(x)| = \begin{cases} a(x) & \text{wenn } a(x) \geq 0 \text{ ist.} \\ -a(x) & \text{wenn } a(x) \leq 0 \text{ ist.} \end{cases}$

a(x) heißt das **Argument** des Betrags, also der Term zwischen den Betragsstrichen.
Manche sagen im unteren Fall „$=-a(x)$ wenn $a(x) < 0$ ist“.
Ich schreibe $a(x) \leq 0$, was auch richtig ist, denn $|0| = 0$. Und so ist es weniger verwirrend.

(2) Der Term $|4-2x|$ sieht schwierig aus, weil x einen negativen Koeffizienten hat.
Aber es gilt: $|4-2x| = |2x-4|$!!! Und ich verwende dies in solchen Fällen immer.
Die Begründung ist einfach: $|4-2x| = |(-1)\cdot(2x-4)| = |-1|\cdot|2x-4| = |2x-4|$

(3) Wenn <u>zwei Ungleichungen</u> gemeinsam erfüllt werden sollen, gibt es diese Fälle
Beispiel 1: $x \geq 1$ und $x \geq -2$: Das führt zu $x \geq 1$ bzw. $x \in [\,1;\infty\,[$
Beispiel 2: $x \geq -2$ und $x \leq 3$: Das führt zu $-2 \leq x \leq 3$ bzw. $x \in [\,-2;3\,]$
Beispiel 3: $x \leq \frac{3}{2}$ und $x \leq -\frac{1}{2}$: Das führt zu $x \leq -\frac{1}{2}$ bzw. $x \in \,]-\infty;-\frac{1}{2}\,]$
Beispiel 4: $x \geq$ [illegible] und $x \leq 2$: Dies ist unvereinbar, die Lösungsmenge ist leer.

Weitere Texte der Mathe-CD zum Rechnen mit Beträgen:

12160 **Keine Ahnung** vom Rechnen mit Beträgen
und einfache Betragsgleichungen

12161 **Keine Ahnung** von linearen Betragsungleichungen (Dieser Text)

12162 <u>Betragsgleichungen</u>: Große Sammlung in allen Schwierigkeitsgraden (dieser Text)

12163 **Keine Ahnung** von quadratischen Betragsgleichungen

12164 <u>Betragsungleichungen</u>: Große Sammlung in allen Schwierigkeitsgraden

Aufgabensammlung

1. Gleichungen mit einem Betrag (Lösungen ab Seite 4)

1.1 $|x| = 8$

1.2 $|x-5| = 7$

1.3 $|3x+8| = 5$

1.4 $\left|2-\frac{1}{4}x\right| = 5$

1.5 $x+|x-2| = 6$

1.6 $|4x-1|+2x = 9$

1.7 $4x-|2x+1| = 9$

1.8 $|5x-3|+5x = 12$

1.9 $2x-|6-4x| = -8$

1.10 $|6-3x|+8 = x+12$

1.11 $7x-|2x+3| = -2x-3$

1.12 $2\cdot|5-x|+5x = 3x-2$

2. Gleichungen mit zwei Beträgen (Lösungen ab Seite 7)

2.1 $|x-2| = |3x-4|$

2.2 $|3x-6|+2 = |3x+4|$

2.3 $|x+1|$ [illegible] $= |2x-3|$

2.4 $|x-3|-|x-5| = 16$

2.5 $|4x+8|-30 = |2x-12$ [illegible]

2.6 $|x-1|+|x$ [illegible] $| = 6$

3. Gleichungen mit geschachtelten Beträgen (Lösungen ab Seite 13)

3.1 $\big||x-5|-5\big| = 10$

3.2 $\big||x-5|+5\big| =$ [illegible]

3.3 $\big||x$ [illegible] $\big| = 10$

3.4 $\big|2-|x-3|\big| = 3$

3.5 $\big||2x-12|+4x\big|$ [illegible]

3.6 $\big|8-|2-5x|\big| = 8$

4. Quadratische Betragsgleichungen (Lösungen ab Seite 16)

4..1 $|x^2+3x| = 4$

4.2 $|x$ [illegible] $x-33|$ [illegible]

4.3 $|x^2+16| = 17$

4.4 $|x^2-12| = 4$

4.5 $|x^2-x|$ [illegible]

4.6 $|x^2+8x| = 9$

4.7 $|x^2-9x+16| = 2$

4.8 $|x^2-5x+4|$ [illegible] $x+5| = 6$

4.9 $|2x^2-18| = |x^2+4|$

4.10 $|2x^2-18| = |x^2-4|$

5. Betragsgleichungen mit Bruchtermen (Lösungen ab Seite 20)

5.1 $\frac{|2\ldots2|}{\ldots-1} = 3$ [illegible]

5.2 $\frac{2x-4}{|x+1|}+5 = 0$

5.3 $\frac{|x-2|+3}{x+1} = 1$

5.4 $\frac{|\ldots2|-x}{x\ldots} = -1$ [illegible]

5.5 $\frac{x+2}{x-2} = \frac{|x+2|}{4x}$

5.6 $\left|\frac{x+3}{x}\right| = 2$

5.7 $\frac{2}{|x+5|} = \frac{\ldots}{|3\ldots}$ [illegible]

5.8 $|2x-4| = \frac{8}{x+1}$

5.9 $\frac{x+1}{|x-1|} = \frac{|x-2|}{x+2}$

5.10 $|x-1| < \frac{x^2-5x+4}{x+2}$

1. Gleichungen mit einem Betrag - Lösungen

1.1 $|x| = 8$

Welche Zahlen haben den Betrag 8? $x_{1,2} = \pm 8$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{\pm 8\}$

1.2 $|x-5| = 7$

Welcher Term hat den Betrag 7, also den Wert ± 7 *?*

$x - 5 = \pm 7 \quad | +5$

$x_{1,2} = 5 \pm 7 = \begin{cases} 12 \\ -2 \end{cases}$ Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-2\,;12\}$

1.3 $|3x+8| = 5$

$3x + 8 = \pm 5 \quad | \text{-}8$

$3x = \begin{cases} 5-8=-3 \\ -5-8=-13 \end{cases} \quad | :3$

$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{13}{3}$ Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-\frac{13}{3}\,;-1\}$

1.4 $|2-\frac{1}{4}x| = 5$

$2 - \frac{1}{4}x = \pm 5 \quad | \text{-}2$

$-\frac{1}{4}x = \begin{cases} 5-2=3 \\ -5-2=-7 \end{cases} \quad | \cdot(-4)$

$x_1 = -12,\ x_2 = 28$ Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-12; 28\}$

1.5 $x + |x-2| = 6$

Vorarbeit: $|x-2| = \begin{cases} (x-2) & \text{wenn } x \ge 2 \\ -(x-2) & \text{wenn } x \le 2 \end{cases}$

1. Fall: $x \ge 2$:

$x + (x-2) = 6$

$2x - 2 = 6$

$2x = 8 \Rightarrow x_1 = 4$

2. Fall: $x \le 2$

$x - (x-2) = 6$

$2 = 6$

Falsche Aussage!

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{4\}$

1.6 $|4x-1| + 2x = 9$

Vorarbeit: $|4x-1| = \begin{cases} (4x-1) & \text{wenn } x \ge \frac{1}{4} \\ -(4x-1) & \text{wenn } x \le \frac{1}{4} \end{cases}$

1. Fall: $x \ge \frac{1}{4}$:

$(4x-1) + 2x = 9$

$6x = 10$

$x_1 = \frac{5}{3}$

2. Fall: $x \le \frac{1}{4}$:

$-(4x-1) + 2x = 9$

$-2x = 8$

$x_2 = -4$

Kontrolle: $x_1 = \frac{5}{3}\ (> \frac{1}{4}!!)$ $x_2 = -4\ (< \frac{1}{4}!!)$

Beide Ergebnisse liegen also in den untersuchten Intervallen, also:

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-4\,;\frac{5}{3}\}$

1.7 $4x - |2x+1| = 9$

Vorarbeit: $|2x+1| = \begin{cases} (2x+1) & \text{wenn } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1) & \text{wenn } x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$

1. Fall: $x \geq -\frac{1}{2}$:

$4x - (2x+1) = 9$

$2x = 10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5$

2. Fall: $x \leq -\frac{1}{2}$:

$4x + (2x+1) = 9$

$6x = 8 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{4}{3} \quad (> -\frac{1}{2}!!!)$

$x_1 = 5$ liegt im vorgegebenen Intervall, $x_2 = \frac{4}{3}$ aber nicht!

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{5\}$

1.8 $|5x-3| + 5x = 12$

Vorarbeit: $|5x-3| = \begin{cases} (5x-3) & \text{wenn } x \geq \frac{3}{5} \\ -(5x-3) & \text{wenn } x \leq \frac{3}{5} \end{cases}$

1. Fall: $x \geq \frac{3}{5}$

$(5x-3) + 5x = 12$

$10x = 15 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2}$

2. Fall: $x < \frac{3}{5}$

$-(5x-3) + 5x = 12$

$3 = 12$ falsche Aussage!

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{\frac{3}{2}\}$

1.9 $2x - |6-4x| = -8$

Vorarbeit: $|6-4x| = |4x-6| = \begin{cases} (4x-6) & \text{wenn } x \geq \frac{3}{2} \\ -(4x-6) & \text{wenn } x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

1. Fall: $x \geq \frac{3}{2}$:

$2x - (4x-6) = -8$

$-2x = -14 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 7$

2. Fall: $x \leq \frac{3}{2}$:

$2x + (4x-6) = -8$

$6x = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

Beide Ergebnisse liegen in den untersuchten Intervallen, also:

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{7 ; -\frac{1}{3}\}$

1.10 $|6-3x| + 8 = x + 12$

Vorarbeit: $|6-3x| = |3x-6| = \begin{cases} (3x-6) & \text{wenn } x \geq 2 \\ -(3x-6) & \text{wenn } x \leq 2 \end{cases}$

1. Fall: $x \geq 2$:

$(3x-6) + 8 = x + 12$

$2x = 10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5$

2. Fall: $x \leq 2$:

$-(3x-6) + 8 = x + 12$

$-4x = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}$

Beide Ergebnisse liegen in den untersuchten Intervallen, also:

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{5 ; \frac{1}{2}\}$

1.11 $7x - |2x+3| = -2x - 3$ Vorarbeit: $|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & \text{wenn } x \geq -\frac{3}{2} \\ -(2x+3) & \text{wenn } x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$

1. Fall: $x \geq -\frac{3}{2}$:

$7x - (2x+3) = -2x - 3$

$7x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

2. Fall: $x \leq -\frac{3}{2}$:

$7x + (2x+3) = -2x - 3$

$11x = -6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{6}{11} \quad \left(> -\frac{3}{2}\,!!!\right)$

$x_1 = 0$ liegt im vorgegebenen Intervall, $x_2 = -\frac{6}{11}$ aber nicht!

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{0\}$

1.12 $2 \cdot |5 - x| + 5x = 3x - 2$ Vorarbeit: $|5-x| = |x-5| =$ [illegible] 5) wenn x [illegible]; (x − 5) wenn x ≤ [illegible]

1. Fall: $x \geq 5$:

$2(x-5) + 5x = 3x - 2$

$4x = 8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$

Aber 2 < 5 !!!

2. Fall: [illegible] $x < 5$

$-2($x [illegible]$) + 5x = 3x - 2$

[illegible] = −2 [illegible] sage!

Lösungsmenge: [illegible]